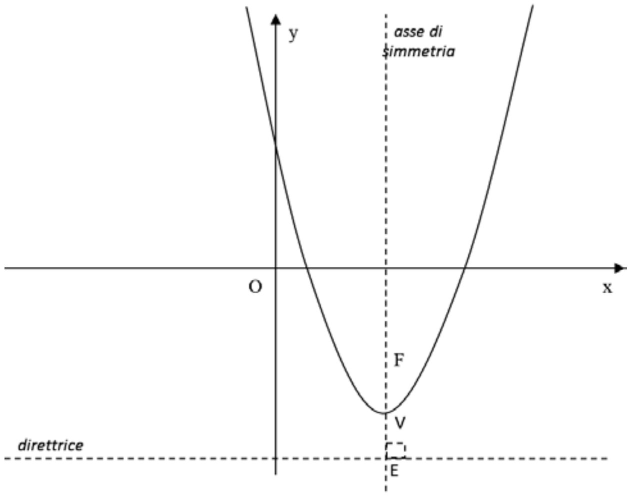
LEZIONI

PARABOLA

Definizione

Si definisce parabola il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, F, detto fuoco, e da una retta fissa, d, detta direttrice.

La definizione data mette in evidenza il fatto che ogni parabola ha un suo fuoco ed una sua direttrice. In pratica, parabole differenti non possono avere uno stesso fuoco ed una stessa direttrice.



Sia E il piede della perpendicolare condotta dal punto F alla direttrice d. La retta EF si chiama **asse di simmetria della parabola**. Il punto medio V del segmento EF si chiama **vertice della parabola** ed è il punto più basso della parabola (nel caso in cui la concavità sia rivolta verso l'alto).

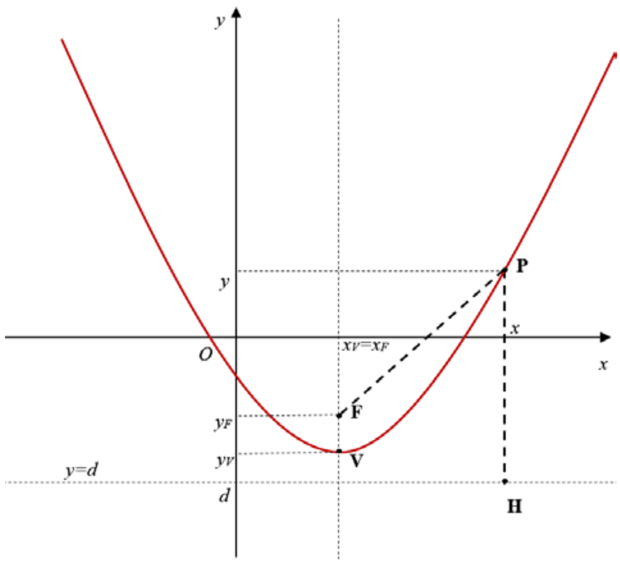
Equazione cartesiana della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate

Siano $F(x_F; y_F)$ e $y = d$ rispettivamente il fuoco e la direttrice di una parabola $\mathscr{P}$. Indicando con P un generico punto della parabola, la definizione data di parabola può essere sintetizzata nella seguente relazione:

$$P \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overline{PF} = \overline{PH} . \qquad \textbf{(*)}$$

Leggendo le coordinate dei punti rappresentati nel grafico in figura risulta evidente che:

$V = (x_F; \, y_V), \; P = (x; \, y), \; H = (x; \, d)$.



Determiniamo la distanze tra i punti P ed F e quella tra i punti P e H:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} \, ;$$

$$\overline{PH} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - d)^2} = \sqrt{(y - d)^2} = |(y - d)| \, .$$

Pertanto la relazione $\overline{PF} = \overline{PH}$ può essere così scritta:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = |(y - d)|$$

elevando entrambi i membri al quadrato, si ha:

$$\left(\sqrt[\cancel{2}]{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2}\right)^{\cancel{2}} = \left(\left|(y-d)\right|\right)^2$$

$$(x-x_F)^2+(y-y_F)^2=(y-d)^2;$$

svolgiamo i quadrati di binomio:

$$x^2+x_F^2-2x\cdot x_F+\cancel{y^2}+y_F^2-2y\cdot y_F=\cancel{y^2}+d^2-2y\cdot d$$

isoliamo l'incognita y:

$$2y\cdot y_F-2yd=+x^2-2x\cdot x_F+x_F^2+y_F^2-d^2$$

$$2(y_F-d)\,y=+x^2-2x\cdot x_F+x_F^2+y_F^2-d^2$$

$$y=\frac{x^2}{2(y_F-d)}-\frac{\cancel{2}x\cdot x_F}{\cancel{2}(y_F-d)}+\frac{x_F^2+y_F^2-d^2}{2(y_F-d)}$$

$$y=\frac{x^2}{2(y_F-d)}-\frac{x\cdot x_F}{(y_F-d)}+\frac{x_F^2+y_F^2-d^2}{2(y_F-d)}.$$

Infine, ponendo:

$$a=\frac{1}{2(y_F-d)},\ \ b=-\frac{x_F}{(y_F-d)},\ \ c=\frac{x_F^2+y_F^2-d^2}{2(y_F-d)}$$

si ottiene l'equazione cartesiana della parabola:

$$\mathscr{P}: y=ax^2+bx+c$$

dove x e y sono le incognite, mentre a, b e c sono dei coefficienti numerici.

Nel seguente specchietto sono elencate le formule che permettono di ottenere gli elementi significativi della parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse:

Vertice $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;	***Fuoco*** $\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$;
asse di simmetria $x=-\frac{b}{2a}$;	***direttrice*** $y=-\frac{1+\Delta}{4a}$;

OSSERVAZIONE

Se il coefficiente <u>a è negativo</u>, la parabola volge la concavità verso il basso, se <u>a è positivo</u> la parabola volge la concavità verso l'alto.

APPLICAZIONI

1 - <u>Come calcolare il vertice della parabola</u>

<u>Esercizio 1.1</u>

Determinare il vertice della parabola $y = 3x^2 - 5x - 8$.

Basterà applicare le formule:

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-5)}{2\cdot 3} = \frac{5}{6} \\ y_V &= -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4\cdot 3\cdot(-8) - 5^2}{4\cdot 3} = \frac{96-25}{12} = \frac{71}{12} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad V\left(\frac{5}{6};\frac{71}{12}\right)$$

Se per trovare l'equazione della parabola viene dato il vertice, questo rappresenta da solo 2 delle condizioni necessarie, ponendo ad es. $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{6}$ e $\frac{4ac - b^2}{2a} = \frac{71}{12}$.

2 - <u>Come determinare il vertice, il fuoco, la direttrice e l'asse di simmetria</u>

<u>Esercizio 2.1</u>

Determinare il vertice, il fuoco, la direttrice e l'asse di simmetria della parabola di equazione:

$y = 2x^2 - 6x + 3$.

Per determinare il vertice della parabola, anche in questo caso basterà applicare le formule.

Prima di tutto determiniamo Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 36 - 24 = 12.$$

Calcoliamo il **<u>vertice</u>** $V\left(x_V; y_v\right)$:

$$\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{4} = \frac{3}{2} \\ y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad V\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Calcoliamo ora il **fuoco** $F\left(x_F\,;y_F\right)$:

$$\begin{cases} x_F = x_V = \dfrac{3}{2} \\ y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{1-12}{8} = -\dfrac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{3}{2};-\frac{11}{8}\right)$$

L'equazione dell'**asse di simmetria**:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

L'equazione della **direttrice**:

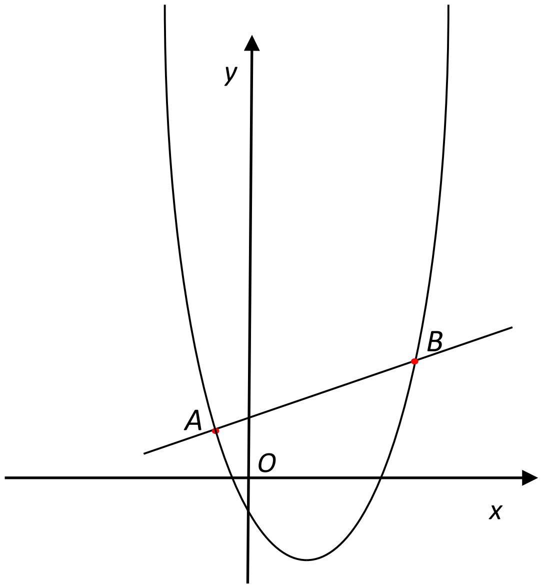
$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+12}{8} = -\frac{13}{8} \Rightarrow d: y = -\frac{13}{8}$$

3 - Come determinare i punti d'intersezione tra una retta ed una parabola

Le coordinate dei punti di intersezione di una parabola con una retta sono le soluzioni del sistema di secondo grado:

$$\begin{matrix} \mathcal{P} \\ r \end{matrix} \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Costituito dall'equazione della parabola e da quella della retta. Se le soluzioni del sistema sono due, reali e distinte, allora la retta è secante rispetto alla parabola; se le soluzioni sono reali e coincidenti, allora la retta è tangente rispetto alla parabola; se, infine, le soluzioni non sono reali, allora le due curve non hanno punti in comune: la retta è esterna rispetto alla parabola.



Esercizio 3.1

Determinare le coordinate dei punti di intersezione della parabola $y = x^2 - 2x - 3$ *con la retta* $y = -x - 1$

Le coordinate dei punti di intersezione della parabola con la retta si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = -x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \searrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \end{matrix}$$

Le due curve si intersecano nei punti: $A(-1;\,0)$ e $B(2;\,-3)$.

4 - Come disegnare la parabola

Per rappresentare graficamente una parabola si utilizzano prevalentemente due metodi. Uno è quello che permette di disegnare la parabola utilizzando solo " riga e compasso". L'altro richiede la determinazione di alcuni punti significativi della parabola: il vertice, ossia il punto più basso o più alto (a seconda di dove è rivolta la concavità della parabola), i punti A e B ove la parabola interseca l' asse x e il punto C d'intersezione con l'asse y. Dopo aver fatto questo è opportuno individuare anche il punto C', simmetrico di C rispetto all'asse di simmetria.

Esercizio 4.1

Disegnare la seguente parabola $y = x^2 - 6x + 5$.

Determiniamo le coordinate del vertice V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-36 + 4 \cdot 5}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

quindi: $V(3;-4)$.

L'asse di simmetria, la cui equazione è uguale all'ascissa del vertice, è $x = 3$. Per trovare le intersezioni con gli assi è necessario mettere a sistema l'equazione della parabola con quella di ogni asse cartesiano (ricordiamo che l'asse y ha equazione $x = 0$ mentre l'asse delle x ha equazione $y = 0$).

Determiniamo le intersezioni con l'asse x:

$$\begin{matrix} \mathscr{P} \\ \textit{asse } x \end{matrix} \begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

risolviamo l'equazione di 2° grado

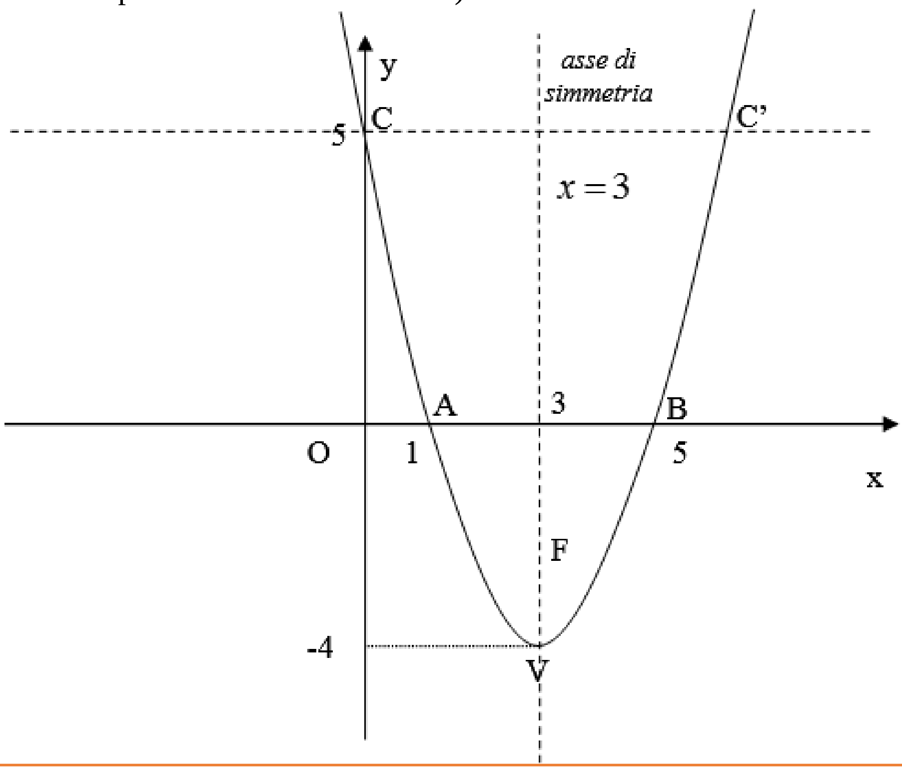
$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{matrix}.$$

Pertanto le intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse sono date dai punti A(1; 0) e B(5; 0).

Determiniamo le intersezione con l'asse y:

$$\begin{matrix} \mathcal{P} \\ asse\ y \end{matrix} \begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

La soluzione è immediata in quanto sostituendo 0 alle *x* della prima equazione resta $y = 5$. Pertanto l'intersezione della parabola con l'asse delle ordinate è data dal punto C(0; 5).
Non ci rimane altro che tracciare la parabola facendola passare per il vertice V, i punti A, B, C e C'(simmetrico di C rispetto all'asse di simmetria):



5 - <u>Come determinare l'equazione di una parabola, noti alcuni dati</u>.

L'equazione di una parabola dipende dai suoi tre coefficienti, (*a*, *b*, *c*), pertanto può essere determinata soltanto se disponiamo di almeno tre dati:

a) le coordinate di un punto della parabola forniscono *un dato;*
b) le coordinate del vertice forniscono *due dati*;
c) le coordinate del fuoco forniscono *due dati*;
d) l'equazione della direttrice fornisce *un dato;*
e) l'equazione dell'asse di simmetria fornisce *un dato*;
f) l'equazione di una retta tangente alla parabola fornisce *un dato;*
g) le coordinate del vertice e quelle del fuoco (insieme) forniscono *tre dati*;
h) le coordinate del vertice (o del fuoco) e l'asse di simmetria forniscono (solo) due *dati*.

6 - Come determinare l'equazione di una parabola passante per tre punti

Esercizio 6.1

Scrivere l'equazione della parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti: $A(1;-2)$, $B(2;-5)$ e $C(6;3)$.

L'equazione di una generica parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate è del tipo: $y = ax^2 + bx + c$. Poiché i tre punti dati devono appartenere alla parabola, le loro coordinate devono verificarne l'equazione. Imponendo le suddette condizioni, si ottiene il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} a+b+c=-2 \\ 4a+2b+c=-5 \\ 36a+6b+c=3 \end{cases}$$

Risolto il sistema si ha: $a=1,\ b=-6,\ c=3$. Sostituendo tali valori nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ si ha:

$$y = x^2 - 6x + 3$$

Esercizio 6.2

Trovare l'equazione della parabola passante per A(0;-8), B(1;-10), C(2;-6)

L'equazione generica della parabola è ancora $y = ax^2 + bx + c$. Sostituendo alla x e alla y di tale equazione i valori di ciascun punto, si ottiene il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} -8 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c \\ -10 = a\cdot 1 + b\cdot 1 - c \\ -6 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-8 \\ a+b+c=-10 \\ 4a+2b+c=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-8 \\ a+b-8=-10 \\ 4a+2b-8=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-8 \\ a+b=-2 \\ 4a+2b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-8 \\ b=-2-a \\ 4a+2(-2-a)=2 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-8 \\ b=-5 \\ a=3 \end{cases}$$

L'equazione finale sarà dunque $y=3x^2-5x-8$

7 - <u>Come scrivere l'equazione di una parabola noto il vertice ed un suo punto</u>

<u>Esercizio 7.1</u>

Scrivere l'equazione della parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse y *, avente il vertice nel* punto $V(4;-13)$ *e passante per il punto* $A(-1;12)$

Svolgeremo l'esercizio in due modi differenti:

<u>Primo metodo</u> (mediante un sistema di equazioni)

L'equazione della parabola che cerchiamo è del tipo $y=ax^2+bx+c$. Come sappiamo le coordinate del so vertice sono: $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Imponendo che tale parabola passi per il punto $A(-1;12)$ e che le coordinate del suo vertice siano quelle di $V=(4;-13)$ si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=4 \\ -\frac{\Delta}{4a}=-13 \\ a-b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-8a \\ \Delta=52a \\ a-b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-8a \\ b^2-4ac=52a \\ a-b+c=12 \end{cases}$$

Sostituendo $b=-8a$ nelle ultime due equazioni, si ha:

$$\begin{cases} b=-8a \\ 64a^2-4ac=52a \\ a+8a+c=12 \end{cases}.$$

Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per $4a$, si ha:

$$\begin{cases} b=-8a \\ 16a-c=13 \\ 9a+c=12 \end{cases}$$

Sommando a ciascun membro della seconda equazione i corrispondenti membri della terza, si ottiene:

$$\begin{cases} b=-8a \\ 16a-c+9a+c=13+12 \\ 9a+c=12 \end{cases}$$

da cui segue:

$$\begin{cases} b=-8a \\ 25a=25 \\ 9a+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-8a \\ a=1 \\ 9a+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-8 \\ a=1 \\ c=3 \end{cases}.$$

L'equazione della parabola è quindi: $y=x^2-8x+3$

Secondo metodo

Il problema può essere risolto più semplicemente utilizzando la formula del **fascio di parabole** con asse di simmetria parallelo all'asse y e avente vertice $V(x_v; y_v)$. Questa ne è l'equazione:

$$y=a(x-x_v)^2+y_v \qquad (*)$$

Imponendo alla parabola di avere vertice $V(4; -13)$ e di passare per il punto $A(-1; 12)$, si ha:

$$12=a(-1-4)^2-13$$

$$25a=25$$

$$a=1$$

Pertanto, sostituendo nella (*), si ottiene l'equazione della parabola cercata:

$$y=(x-4)^2-13$$

da cui:

$$y=x^2-8x+3$$

8 - Come determinare l'equazione della retta tangente alla parabola in un punto dato

Questa in genere è una delle parti più complesse per gli studenti. Ci si limiterà quindi a dare la formula e vederne l'applicazione. Data la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$, l'equazione della retta tangente alla parabola in un punto $P(x_o; y_o)$ è data dalla seguente formula:

$$\frac{y+y_o}{2}=ax_o x+b\frac{x_o+x}{2}+c$$

Esercizio 8.1

Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola $y=3x^2+4x-5$ *nel punto* $P(1;2)$.

Applicando la formula della retta tangente alla parabola nel punto $P(1;2)$ otteniamo:

$$\frac{y+2}{2}=3\cdot1\cdot x+4\frac{1+x}{2}-5$$

Eliminando il denominatore, dopo aver calcolato il minimo comune multiplo tra i termini del 1° e del 2° membro si ha:

$y+2=6x+4+4x-10$

$y=10x-8$

<u>Equazioni particolari della parabola</u>

Se <u>b=0</u> l'equazione sarà del tipo $y=ax^2+c$ e la parabola è tangente all'asse delle ascisse nel vertice.

Se <u>c=0</u> l'equazione sarà del tipo $y=ax^2+bx$, in questo caso la parabola passa per l'origine O(0;0).

Se la <u>b=c=0</u> l'equazione della parabola sarà del tipo $y=ax^2$; il suo grafico ha l'asse di simmetria che coincide con l'asse delle ordinate e il vertice coincide con O(0;0).