PROBLEMI ASSEGNATI

A.S. 2001-2002 - INDIRIZZO P.N.I.

PROBLEMA N° 1

1) Soluzione

I numeri x e y devono necessariamente soddisfare le relazioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x+y-a=0 \\ x-ay=0 \end{cases}$$

Le equazioni del sistema sono quelle di due fasci di rette, il primo improprio, di coefficiente angolare -1 e termine noto –a, il secondo proprio, con centro in (0;0) e coefficiente angolare $\frac{1}{a}$ Le due rette non potranno avere punti di contatto solo quando sono parallele (in quanto, essendo $a \neq 0$ sarebbero anche distinte), cioè nel caso $a=-1$. Per ogni altro valore di $a \neq -1$ il sistema ammetterà sempre una sola soluzione.

2) Soluzione:

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$$x+y=\frac{x}{y}$$

dalla quale segue l'equazione del luogo cercato:

$$\gamma : xy+y^2-x=0 \qquad con\; y \neq 0$$

3) Soluzione:

L'equazione di γ', simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, si ottiene scambiando x con y nell'equazione di γ, cioè:

$$\gamma': \; xy + x^2 - y = 0 \qquad (1)$$

Esplicitando y nella (1) si ottiene:

$$\gamma': \; y = \frac{x^2}{1-x} = -x + \frac{x}{1-x} \qquad con\, x \neq 1$$

E' l'equazione di una iperbole i cui asintoti sono:

$$y = -x - 1 \qquad e \qquad x = 1$$

Dopo aver disegnato il grafico di γ', per simmetria, si potrà ottenere quello di γ.

4) Soluzione:

Determiniamo il punto di intersezione di γ con γ'.

Ponendo a sistema le equazioni delle due curve si ottiene l'equazione risolvente $2x^2 - x = 0$ che permette di determinare i punti di intersezione cercati: O(0, 0) e B(½, ½). Pertanto l'area richiesta è data da:

$$A = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x - \gamma'(x) \right] dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \ln 2 \right) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \simeq 0{,}1137 .$$

Per avere una approssimazione dell'area in questione basterà applicare il metodo dei trapezi. A tal fine, dividiamo l'intervallo [0, ½] in 4 parti:

$$\Delta x = 0{,}125$$

x	f(x)
0	0
0,125	0,107
0,25	0,166

0,375	0,15
0,5	0

A= $2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\left(f(x_0)+2f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)+2f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right)\simeq 0{,}106$

5) Soluzione:

Sostituendo x = 1 nell'equazione di $\gamma:\ xy+y^2-x=0$ si ha:

$$y^2+y-1=0 \qquad (2)$$

le cui soluzioni sono:

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

La (2) scritta nella forma:

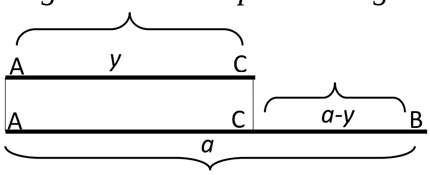
$$1:y=y:(1-y)$$

costituisce l'equazione che permette di determinare la sezione aurea, y, del segmento di lunghezza unitaria. Pertanto, dal punto di vista geometrico l'ordinata del punto di ascissa x=1,rappresenta la sezione aurea del segmento di lunghezza unitaria $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

....

N.B.

Si definisce sezione aurea di un segmento $\overline{AB}$ la parte di segmento che è media proporzionale fra tutto il segmento e la parte che resta:



$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB} \qquad \textbf{(i)}$$

*Occorre dividere il segmento $\overline{AB}$ con un punto C tale che il segmento $\overline{AC}$ stia in mezzo nella proporzione tra tutto il segmento $\overline{AB}$ ed il pezzetto $\overline{CB}$ che resta. Indicata con a la misura di $\overline{AB}$, con y quella $\overline{AC}$ e con a-y quella di $\overline{CB}$, la relazione **(i)** può essere scritta nella forma*

$$a:y=y:(a-y)$$

cioè:

$$\frac{a}{y}=\frac{y}{a-y}$$

da cui:

$$a^2-ay=y^2 \Rightarrow y^2+ay-a^2=0.$$

Risolvendo rispetto a y:

$$y_{1/2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(-a^2)}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{-a(1\pm\sqrt{5})}{2}.$$

Non potendo accettare per y valori negativi, la sezione aurea del segmento $\overline{AB}$ *è pari a* $\dfrac{-a(1-\sqrt{5})}{2}$.

Nel caso la lunghezza di $\overline{AB}$ *sia unitaria, il valore della sezione aurea sarà pari a* $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

QUESTIONARIO

1) Soluzione:

La media aritmetica è data da $m_a = \dfrac{a+b}{2}$

mentre quella geometrica è data da $\sqrt{ab}$.

Tra le due medie vale la relazione $m_a \geq m_b$ (dove il segno di = si ha quando a = b).

Infatti, poiché

$$\forall a,b \in \Re^+ : \ a+b-2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0,$$

necessariamente:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ .$$

Generalizzando, se i numeri assegnati sono n si ha:

$$m_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} \quad \text{e} \quad m_b = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

2) Soluzione:

- Indicato con E_1 l'evento "esce 1 nel lancio di un dado", $p(E1) = \frac{1}{6}$

  pertanto $p(\overline{E}_1) = \frac{5}{6}$.

  Detto *E* l'evento "ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado", la probabilità che esso si verifichi è complementare a quella dell'evento "non ottenere mai 1 in 4 lanci di un solo dado"; per il teorema della probabilità contraria si ha:

  $$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,52$$

- La probabilità che lanciando 2 dadi non esca un doppio 1 è pari a 35/36 (le possibili combinazioni sono 36), quindi la probabilità di non ottenere il doppio 1 in 24 lanci è pari a $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

  Applicando ancora il teorema della probabilità contraria si avrà che la probabilità di ottenere un doppio 1 lanciando 2 dadi per 24 volte è pari a $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,49$.

In definitiva, dei due eventi ipotizzati è maggiore la probabilità che si verifichi il primo.

3) Soluzione:

La probabilità che si verifichi l'evento "la prima partita non finisce in parità" è 2/3 mentre la probabilità che le rimanenti 12 partite terminino in parità è

$\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.

Quanto osservato per la prima partita vale anche per le rimanenti 12 perciò la probabilità cercata è pari a $13 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{12} \simeq 1,63$.

4) Soluzione:

Si osservi che la successione data è a termini positivi e risulta

$\frac{3^n}{n!} < \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$

(infatti $\frac{3^n}{n!} < \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n} < \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$)

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$, per il teorema del confronto è anche $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$

.

5) Soluzione:

- Una funzione y = f(x) si dice periodica di periodo T quando

$$\forall x \in D: \; f(x) = f(x+kT)$$

  con $k \in \mathbb{Z}$ e T il più piccolo dei numeri reali che per cui ciò si verifica.

- Essendo 2π il periodo della funzione $y = senx$, il periodo della funzione

  $y = -sen\frac{\pi x}{3}$ è dato da $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$

- Il periodo della funzione $y = sen2x$ è $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

6) **Soluzione:**

7) **Soluzione:**

8) **Soluzione:**

9) **Soluzione:**

10) **Soluzione:**