Teoria in pillole: logaritmi

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo

$$a^x = b \;,\; \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0 \;;\; x \text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere *impossibile*, *indeterminata o determinata* :

- *impossibile* se $b \le 0,$ oppure $b \ne 1$ e $a = 1$; esempio: $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- *indeterminata* se $a = 1,\; b = 1$; esempio: $1^x = 1$;
- *determinata* se $a > 0,\; a \ne 1,\; b > 0$; esempio: $3^x = 5$.

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si possono scrivere come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti :
  $2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3;$
- **nel caso in cui** a e b non siano esprimibili come potenze (razionali) nella stessa base, sarà possibile esprimere x solo attraverso un nuovo operatore: il **logaritmo**.

LOGARITMI

Con $a > 0,\; a \ne 1,\; b > 0,$ diremo che x è il **logaritmo in base *a* di *b*,** e scriveremo $\log_a b = x$ **,**
se x è l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare $a^x = b$, cioè l'esponente x da assegnare alla base *a* per ottenere il numero *b:*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b\,.$$

Dalla definizione data risulta evidente che il logaritmo è l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base *a*>0 , deve essere *b*>0 , in quanto è sempre $a^x > 0$**.** Inoltre valgono i casi particolari:

$\log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$;

$\log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.

nel caso in cui a e b non si possano esprimere come potenze (razionali) della stessa base, l'introduzione del logaritmo consente di esprimere le soluzioni dell'equazione esponenziale $a^x = b$ nella forma $x = \log_a b$**.**

Nel caso dell'equazione $2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = log_2 3$.

Dalla definizione di logaritmo e dalle proprietà delle potenze si ricavano con facilità le seguenti relazioni:

1. $\log_b 1 = 0$ $\qquad a > 0$
2. $\log_a a = 1$ $\qquad a > 0; a \ne 1$
3. $\log_a a^n = n$ $\qquad a > 0$

4. $b = a^{\log_a b}$ $\qquad a > 0; a \neq 1$, b>0

Sono facilmente dimostrabili le seguenti proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c \quad (a,b,c > 0);$

2) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a \mathrm{c} \quad (a,b,c > 0);$

3) $\log_a b^k = k \times \log b \quad (a,b,c > 0\ ;\ \mathrm{k} \in \mathbf{R}\ )\ ;$

4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a,b,c > 0);$ formula di cambiamento di base nei logaritmi .

5. $\log_b \sqrt[n]{a^m} = \dfrac{m}{n} \cdot \log_b a \qquad a > 0, b > 0; m, n \in \mathrm{N}$.

Operando sulle **basi**, dalla 4 segue:

6. $\log_b a = \log_b c \cdot \log_c a$

7. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

I logaritmi comunemente utilizzati dalle calcolatrici tascabili sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2{,}718$. Il tasto che permette di calcolare $\log_{10} x$, detto anche *logaritmo decimale*, sulle calcolatrici è normalmente indicato con il simbolo *Log oppure* log ; mentre con *lnx* si intende indicare il $log_e\, x$, detto anche *logaritmo naturale* o *neperiano*.

Funzione logaritmica

Fissata la base $a > 0$ e $a \neq 1$, chiameremo *funzione logaritmica* ogni funzione che ad $x \in \mathbf{R}^+$ associa $y = \log_a x$.

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

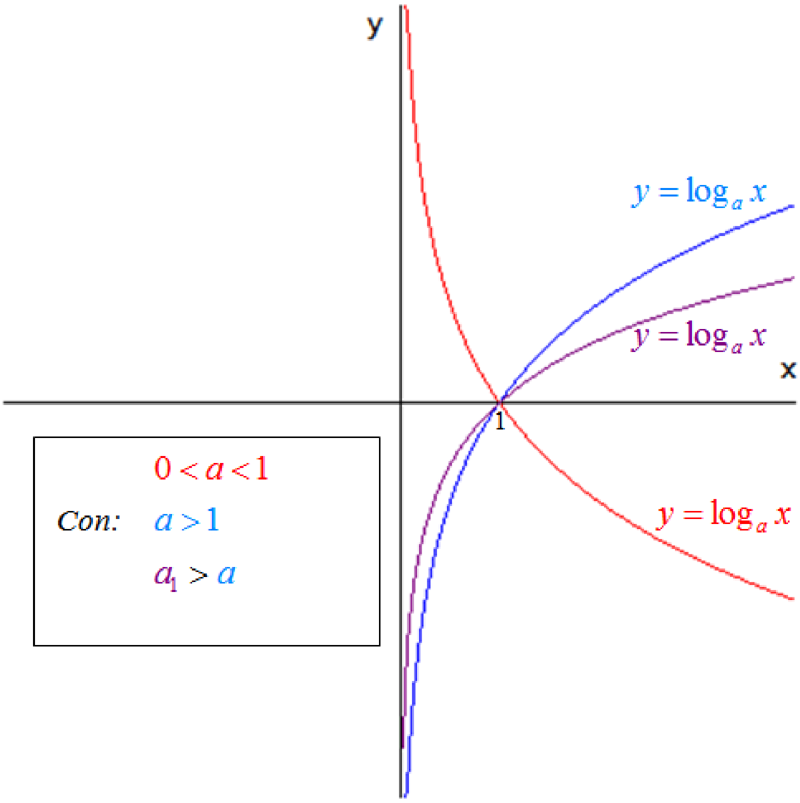
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a *x* è $\mathbf{R}^+$;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è **R** .

Si distinguono due casi.

- Con $a > 1$: la funzione è crescente: $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a \mathrm{x}_2$;
- Con $0 < a < 1$: la funzione è decrescente: $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a \mathrm{x}_2$;

I grafici della funzione logaritmica relativi ai due casi si ottengono da quelli della funzione esponenziale



per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) ; essi illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$log_a\, x = b \;\; , \;\; \text{con } a > 0 \;\text{ e }\; b \in \mathbf{R} \;\; ; \;\; x > 0 \;\text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è : $x = a^b$.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $log_a\, A(x) = log_a\, B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi;
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di *x* calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione:
   $$8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16 .$$

Osserviamo che:

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 \quad \text{e} \; 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}.$$

Quindi è possibile trasformare l'equazione assegnata nell'equazione:

$$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2 \cdot 2^x = 16 \qquad \Rightarrow \qquad 2^x = 8 \qquad \Rightarrow \qquad 2^x = 2^3$$

La soluzione dell'equazione data è quindi $x = 3$.

2. Risolviamo l'equazione:

$$5 \cdot 3^x = 7.$$

Isolando 3^x si ottiene:

$$3^x = \frac{7}{5}.$$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

$$x = log_3 \frac{7}{5} = log_3 7 - log_3 5.$$

3. Risolviamo l'equazione:

$$2^x + 2^{3-x} = 6.$$

Osserviamo che:

$$2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}.$$

L'equazione assegnata è equivalente a:

$$2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$$

Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:

$$\left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

E' evidente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita 2^x.

Ponendo t= 2^x si ha: $t^2 - 6t + 8 = 0$ che risolta fornisce le soluzioni

$2^x = 2$ oppure $2^x = 4$

da cui:

$x = 1$ oppure $x = 2$.

4. Risolviamo l'equazione logaritmica:

$$log_3(x+1) - log_3(x-2) = log_3 x - 2.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x > 2$$

cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.

Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $2 = log_3 3^2$:

$$log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x^2-11x-9=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{157}}{2}.$$

Il valore $x=\frac{11-\sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x=\frac{11+\sqrt{157}}{2}.$$

Esercizi

1. Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze sotto forma di radice:

   a) $3^{\frac{5}{8}}$; $\quad 4^{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

   b) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

   a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\quad \sqrt[4]{243}$; $\quad \sqrt[4]{0.25}$;

   b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\quad \sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\quad \sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

   a) $2^x=16\cdot\sqrt{2}$ $\qquad \left[\frac{9}{2}\right]$

   b) $8^x\cdot\sqrt{2}=4^x$ $\qquad \left[-\frac{1}{2}\right]$

   c) $a^x\cdot a^{2x-1}=\frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\qquad \left[\frac{5}{6}\right]$

   d) $2^x+2^{x+1}=2^{x-1}+7$ $\qquad \left[\log 2\frac{14}{5}\right]$

   e) $4^x=2^x-2$ $\qquad [\varnothing]$

   f) $3\cdot 5^x=7$ $\qquad \left[log_5\frac{7}{3}=\frac{log 7-log 3}{log 5}\right]$

   g) $3^x+3^{1-x}=4$ $\qquad [0;1]$

   h) $3^{2x}-9\cdot 3^x+3=3^{x-1}$ $\qquad [-1;2]$

   i) $6\cdot 2^x+2^{-x}=5$ $\qquad \left[-1;-\frac{log 3}{log 2}\right]$

   j) $2^{2x+3}-25\cdot 2^x+3=0$ $\qquad [-3;log_2 3]$

4. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $log_2(x-1)=3$ $[9]$

b) $log(x-2)+log5=log x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

c) $log(x-2)-log(x-1)=log5$ $[\varnothing]$

d) $2\cdot log_2 x=2+log_2(x+3)$ $[6]$

e) $log(x-1)-2\cdot log(x+1)-log8=-2$ $\left[\frac{3}{2};\,9\right]$

f) $log_3(x-1)=\frac{1}{2}log_3 x$ $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$