Teoria in pillole: funzioni esponenziali

Potenze con esponente reale
La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$;
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

Sono definite:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right);$$
$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};$$
$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

Non sono definite:

$$\left(-2^{\sqrt{3}}\right); \quad 0^0 \quad ; \quad 0^{-3}.$$

Casi particolari :

- $a = 1$, $a^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

Le proprietà delle potenze verificate con esponenti interi valgono anche con esponenti reali. Più precisamente:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a $\mathbf{R}$ si ha:

1. $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $\left(a\cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

Funzione esponenziale
Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ fissato}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto $\mathbf{R}$;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}^+$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :