LEZIONI

GONIOMETRIA

Introduzione alla goniometria e alla trigonometria

Goniometria e trigonometria sono due termini che derivano dal greco e significano rispettivamente misura degli angoli e misura dei triangoli.

Le origini della goniometria e della trigonometria sono assai lontane nel tempo; risalgono a qualche secolo prima di Cristo e sono inizialmente ispirate da esigenze legate alla risoluzione di vari problemi pratici delle scienze applicate come fisica, astronomia, geografia, topografia, navigazione, ecc., dove si presentano di continuo problemi nei quali occorre calcolare, con una data approssimazione, la misura degli elementi di un triangolo (cioè dei lati e degli angoli). Tali problemi sono affrontati dalla **Trigonometria**. Questa branca della matematica si occupa appunto di misurare gli elementi di un triangolo conoscendone tre di essi, di cui almeno uno sia un lato. Per molti secoli, la trigonometria dovette i suoi progressi quasi esclusivamente all'opera di grandi astronomi e geografi. Infatti, la fondazione di questa scienza si deve a **Ipparco di Nicea** (185-127 a.C.), probabilmente il massimo astronomo dell'antichità, e a **Claudio Tolomeo** (200 d.C.), astronomo e geografo, più che matematico. Ad Ipparco si deve il primo tentativo di calcolo della distanza terra-luna e terra-sole mediante l'applicazione della trigonometria. Egli ottenne una misurazione molto precisa della distanza terra-luna (386.220 km contro i 384.400 km reali), mentre non risultò altrettanto esatto, a causa della enorme lontananza e della imprecisione degli strumenti allora disponibili, il calcolo della distanza terra-sole, che tuttavia fu metodologicamente corretto. A partire dal sedicesimo secolo la trigonometria si sviluppa e si afferma anche come disciplina autonoma, raggiungendo quel rigore teorico e quell'aspetto formale e simbolico caratteristici del linguaggio matematico. Oggi sono ben pochi i rami della fisica, sia classica che moderna, che non contemplano per la loro trattazione il calcolo goniometrico e trigonometrico.

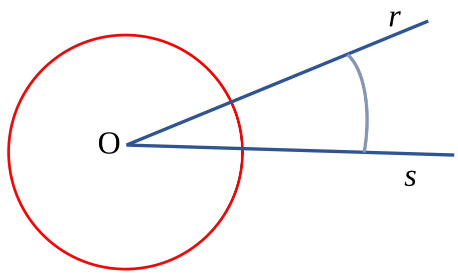
Ipparco di Nicea (185-127 a.C.)

Per affrontare le problematiche di cui si occupa la trigonometria è opportuno introdurre certe funzioni che dipendono solo dagli angoli, dette **funzioni goniometriche**, che permetteranno di mettere in relazioni tra loro i lati e gli angoli di un triangolo. Pertanto, nella prima parte di questo lavoro ci occuperemo di stabilire alcuni concetti basilari sugli angoli e sulla loro misura, di definire le funzioni goniometriche e di studiarne le proprietà.

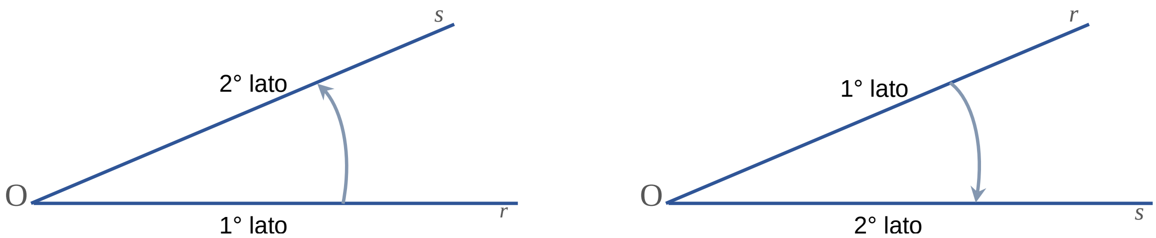
1 Angoli e loro misure

1.1 Angoli orientati

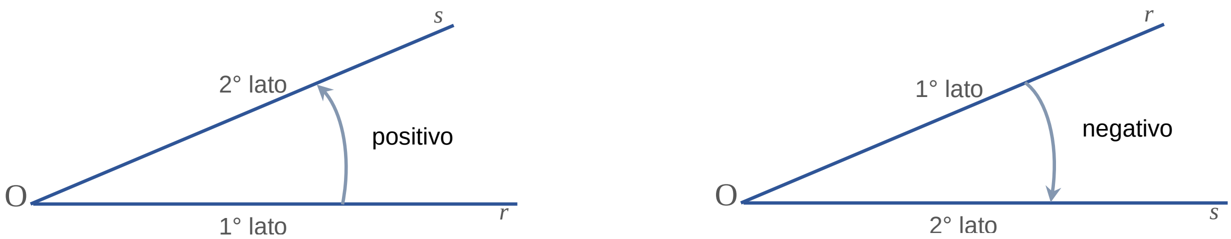
Date in un piano due semirette *r* e *s* aventi la stessa origine O, si definisce **angolo** ciascuna delle due parti del piano delimitate dalle due semirette. Il punto O si dice **vertice** dell'angolo e le due semirette **lati** dell'angolo.



Un angolo si dice **orientato** quando sia stato stabilito quale dei suoi lati è il primo e quale il secondo. In tal caso l'angolo può essere pensato come generato dalla rotazione del primo lato (lato origine) verso il secondo (lato termine), fino alla sovrapposizione dei due.

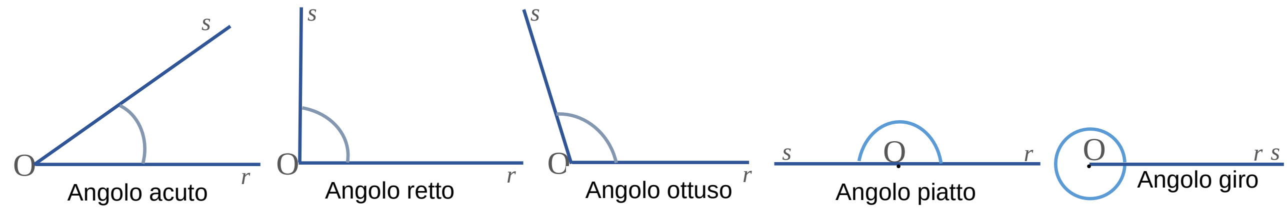


Per convenzione, si considera **positivo** un angolo che si ottiene con una rotazione antioraria, **negativo** un angolo che si ottiene con una rotazione oraria.



1.2 Tipologie di angolo

Si definisce **angolo retto** quell'angolo ottenuto dalla rotazione di un quarto di giro attorno al proprio vertice di uno dei due lati dell'angolo; l'**angolo piatto** è quello ottenuto dalla rotazione di mezzo giro attorno al proprio vertice mentre l'**angolo giro** è quello ottenuto dalla rotazione di un giro completo. Un angolo si dice **acuto** quando misura meno di un angolo retto; è **ottuso** quado è maggiore di un angolo retto.



Misura degli angoli nel sistema sessagesimale

Per misurare una grandezza occorre fissare l'unita di misura: metro, litro, metro quadrato ecc. Varie sono le unità di misura per gli angoli. Tra quelle maggiormente utilizzate troviamo il grado sessagesimale che è la 360° parte dell'angolo giro. La sessantesima parte del grado si dice **minuto primo** ed è indicata con il simbolo [$'$]. Ogni minuto primo si suddivide in 60 **minuti secondi,** indicati con il simbolo [$''$]. Il secondo ha come sottomultiplo il decimo, il centesimo, il millesimo ecc…In formule:

$$1' = \frac{1^\circ}{60} \qquad\qquad 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

Il sistema di misurazione degli angoli in gradi sessagesimali risale all'antica civiltà babilonese.
La notazione in gradi, primi e secondi è indicata dalla sigla DMS (*Degree*, *Minute*, *Second* ovvero Gradi - Minuti - Secondi). A fronte di quanto qui convenuto, l'angolo giro misura 360°, l'angolo piatto 180° e l'angolo retto 90°.

Forma decimale dei gradi
I sottomultipli del grado, oltre che in primi e secondi, possono essere espressi in **forma decimale DD** (*Decimal Degree*). Utilizzando la calcolatrice, per convertire il valore di un angolo da gradi, minuti primi e secondi in gradi decimali basterà usare la funzione: $\text{DMS} \rightarrow \text{DD}$.
Manualmente, se l'angolo è espresso nella forma:

gradi° minutiprimi' minutisecondi"

la conversione dovrà trasformare i minuti primi ed i minuti secondi in gradi. Considerato che 1 minuto primo è la sessantesima parte del grado e che il minuto secondo è la 3600-parte del grado, allora:

$$\text{gradi} + \frac{\text{minuti}}{60} + \frac{\text{secondi}}{3600} = \text{gradi decimali}$$

In pratica, un angolo espresso nella notazione decimale potrà essere convertito nella forma DMS

Ad esempio $14°\ 23'\ 56''$ diventano $14 + \frac{23}{60} + \frac{56}{3600} = 14{,}398889°$

Per convertire il valore di un angolo espresso in gradi decimali in uno in gradi, minuti e secondi si usa la seguente procedura:

1) la parte intera in gradi è la stessa;
2) la parte decimale viene moltiplicata per 60; di tale prodotto la parte intera dà il valore dei minuti;
3) si moltiplica la parte decimale del prodotto ancora per 60: il risultato è il valore dei secondi.

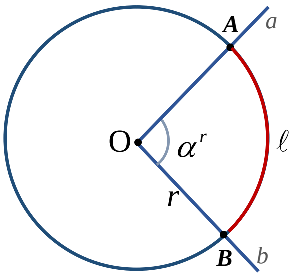
Ad esempio volendo convertire 52,4725° in gradi DMS si ha:
1) D = 52°
2) 0,4725° · 60 = 28,35′ → M = 28′;
3) 0,35′ · 60 = 21″ → S = 21″.

e quindi 52,4725° (DD) → 52° 28′ 21″

Per convertire il valore di un angolo da gradi, minuti e secondi in gradi decimali si usa la seguente formula:

1.3 Misura degli angoli in radianti

Un'altra unità di misura per gli angoli è il **radiante:** è l'angolo al centro di una circonferenza arbitraria che sottende un arco di lunghezza pari al suo raggio. In pratica, se la lunghezza dell'arco sotteso è, ad esempio, meta di quella del raggio, l'angolo è di mezzo radiante; se e doppia di quella del raggio, l'angolo è di due radianti;



La misura di α^r in radianti è uguale al rapporto tra l'arco $\overset{\frown}{AB}$ ed il raggio *r, cioè*:

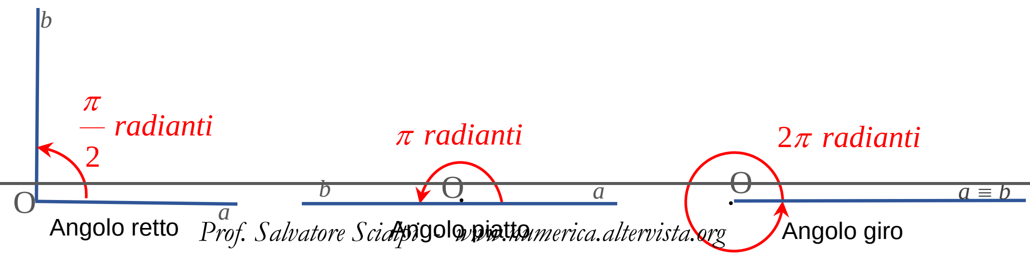
$$\alpha^r = \frac{\ell}{r}.$$

Considerando che la lunghezza di una circonferenza di raggio *r* è pari a $2\pi r$, con semplici calcoli possiamo ottenere le misure in radianti degli angoli giro, piatto e retto, cioè:

misura dell'angolo giro in radianti: $\frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi$

misura dell'angolo piatto in radianti: $\frac{\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = \pi$

misura dell'angolo retto in radianti: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = \frac{\pi}{2}$



Nella pratica, è spesso necessario saper passare dalle misure di un angolo in gradi a quelle dello stesso angolo in radianti. A tal fine, se indichiamo con $\alpha°$ la **misura in gradi** di un angolo, per ottenere l'equivalente **misura in radianti**, α^r, basta utilizzare la seguente proporzione:

$$180° : \pi = \alpha° : \alpha^r$$

da cui:

$$\alpha^r = \frac{\alpha° \cdot \pi}{180°} \quad \text{e} \quad \alpha° = \frac{180° \cdot \alpha^r}{\pi}$$

Esempi:

1) *Esprimere in radianti la misura dell'angolo di 25°.*

Ponendo $\alpha°$ = 25°, nella prima formula si ha: $\alpha^r = \frac{\cancel{25°}^{5} \cdot \pi}{\cancel{180°}_{36}} = \frac{5}{36}\pi$.

2) *Esprimere in gradi la misura dell'angolo di* $\frac{\pi}{2}$ *radianti.*

Ponendo $\alpha^r = \frac{\pi}{2}$, nella prima formula si ha: $\alpha° = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{180°}{2} = 90°$

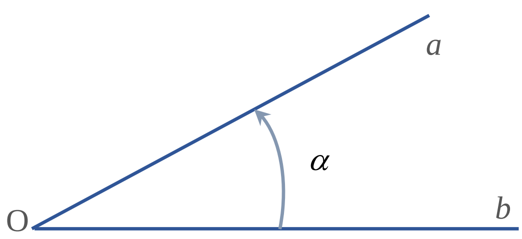
3) *Esprimere in gradi la misura dell'angolo di* 1 *radiante.*

Ponendo α^r = 1, nella prima formula si ha: $\alpha° = \frac{1 \cdot 180°}{\pi} \sim (57{,}2958)° \sim 57°17'45''$

(N.B. $\pi = 3{,}14159...$).

1.4 Angoli orientati maggiori di un angolo giro

Sia α l'angolo individuato dalle semirette *a* e *b* aventi origine comune *O*, ottenuto dalla rotazione del primo lato *a* sul secondo lato *b*, come in figura.



Immaginiamo di continuare a muovere il lato a in senso antiorario: l'angolo α aumenterà via via e dopo un quarto di giro saremo a 90°, dopo mezzo giro saremo a 180°, dopo un giro completo saremo a 360°. Continuando, la misura dell'angolo descritto aumenterà ulteriormente oltre 360°. È in questo modo che sono da intendersi definiti gli angoli di ampiezza maggiore di 360°.

Volendo generalizzare, detta α l'ampiezza di un angolo di lati *a* e *b*, tutti gli angoli β aventi gli stessi lati, espressi in gradi, sono ottenibili dalla seguente relazione:

$$\beta = \alpha + k360°$$

dove *k* è un intero relativo che indica il numero di giri completi che la semiretta *a*, dopo aver descritto l'angolo di ampiezza α, compie attorno al vertice *O*. In particolare, *k* è positivo o negativo a seconda che la semiretta *a* compia i giri completi in senso antiorario o in senso orario.

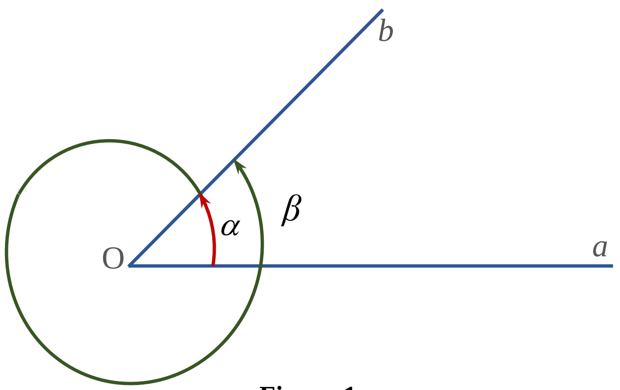


Figura 1

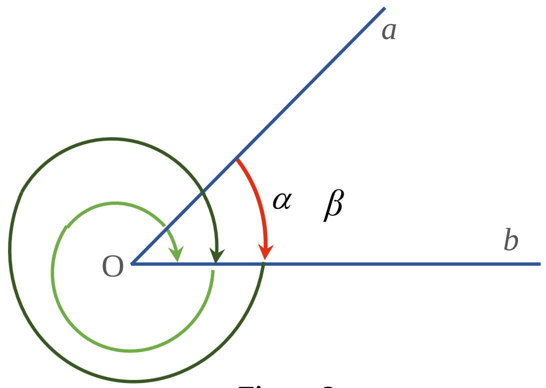


Figura 2

In **Figura 1** l'angolo β è ottenuto dall'angolo α più un giro completo in senso *antiorario*, quindi:

$$\beta = \alpha + 360°.$$

In **Figura 2** l'angolo β è ottenuto dall'angolo α più due giri completi in senso *orario*, quindi:

$$\beta = \alpha - 2 \cdot 360° = \alpha - 720°.$$

2. Funzioni goniometriche

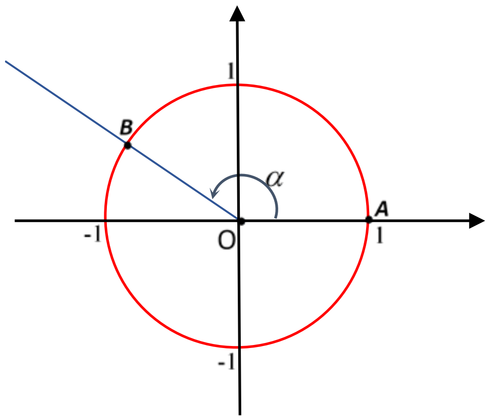
Date due variabili, x e y, con x elemento dell'insieme A e y elemento dell'insieme B, sia f una legge che mette in relazione gli elementi del primo insieme con quelli del secondo. Si dice che f è una funzione di x se ad ogni valore della prima variabile ne fa corrispondere uno ed uno solo della seconda. Le funzioni nelle quali la variabile indipendente è un angolo (o un arco) vengono dette goniometriche o circolari.

2.1 La circonferenza goniometrica

In un piano cartesiano *Oxy*, sia data la circonferenza con il centro nell'origine degli assi e raggio unitario. Supponiamo inoltre che come verso di percorrenza del generico punto P della circonferenza sia stato fissato quello antiorario. Una circonferenza siffatta sarà chiamata d'ora in poi **circonferenza goniometrica.**

Sia ora α un angolo orientato ottenuto facendo muovere il punto B sulla circonferenza partendo dal punto A(1; 0) (fig. 5). Il punto B è detto il **punto associato** all'angolo α sulla circonferenza goniometrica.

In figura 3 sono riportati i punti associati agli angoli particolari. Il punto *A* è associato all'angolo di 0° e anche all'angolo di 360°; il punto *B* è associato all'angolo retto; il punto *C* all'angolo piatto; il punto *D* è associato all'angolo di 270°.

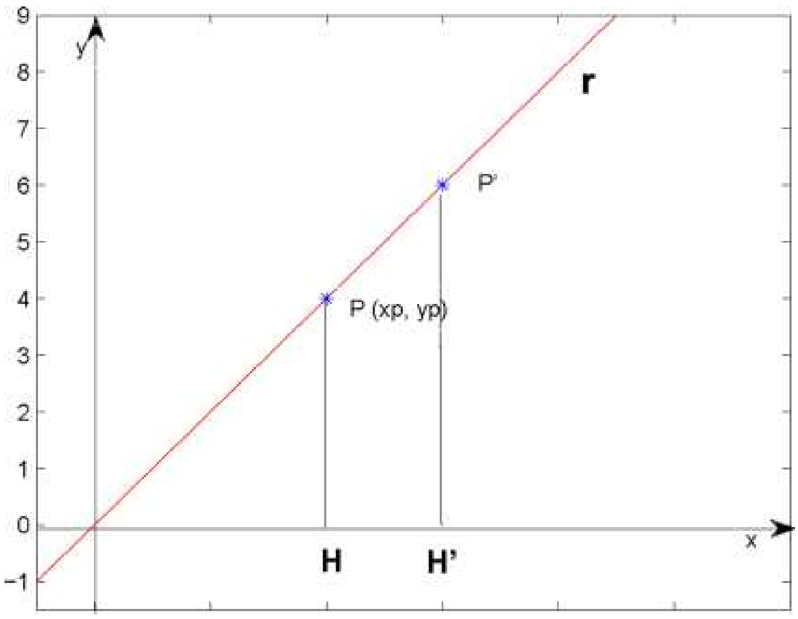


Per definire le funzioni goniometriche elementari risulta opportuno considerare fisso il lato origine degli angoli e variabile il secondo. Riferito un piano ad un sistema cartesiano ortogonale xOy conveniamo di assumere come semiretta origine degli angoli il semiasse positivo delle ascisse.

Nella fgura 4 è rappresentato l'angolo orientato (positivo) a il cui primo lato è il semiasse positivo delle ascisse ed il secondo la semiretta r. Sia P un generico punto della semiretta r, siano x_P e y_P le sue coordinate e sia PO la distanza assoluta di P dall'origine O. I quattro rapporti:

$$\frac{y_p}{\overline{\overline{PO}}},\quad \frac{x_P}{\overline{\overline{PO}}},\quad \frac{y_p}{x_P},\quad \frac{x_P}{y_p}$$

non dipendono dalla posizione di P su r. Lo si puµo verificare prendendo su r un secondo P' e considerando la similitudine che intercorre tra i due triangoli rettangoli PHO e P'H'O. I quattro suddetti rapporti dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo α, sono dunque funzioni di α. Al primo si dà il nome di seno di seno di α, *sen(* α *)*, al secondo di coseno di α, *cos(* α *)*, al terzo di tangente di α, *tg(* α *)* e all'ultimo di cotangente di α, *ctg(* α *).*



9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
y
x
r
P'
P (xp, yp)
H
H'