

LEZIONI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizione

Una equazione si dice di secondo grado se, e solo se, può essere scritta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad \text{con } a \neq 0 \quad (1)$$

I coefficienti a , b , e c sono numeri reali e prendono il nome, nell'ordine, di **coefficiente quadratico**, **coefficiente lineare** e **termine noto**. E' sempre possibile rendere positivo il coefficiente quadratico. Infatti, nel caso in cui $a < 0$, basterà moltiplicare per -1 ciascun membro.

Le soluzioni di tale equazione sono date dalla formula:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dimostrazione:

Per ipotesi il coefficiente a non può essere uguale a zero, pertanto, dividendo per a ciascun membro dell'equazione (1) si ottiene l'equazione equivalente:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

che può essere anche scritta nella forma:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

Aggiungendo in entrambi i membri della (2) il valore $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ si ha:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

che, essendo il termine $\frac{bx}{a}$ uguale al doppio prodotto tra x e $\frac{b}{2a}$, può essere scritta nella forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Nell'ipotesi che $b^2 - 4ac \geq 0$, passando a radice quadrata entrambi i membri dell'equazione si ha ⁽¹⁾:

⁽¹⁾ Ricordiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$ e l'equazione $|x| = k$ ha come soluzioni $x = \pm k$.

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

da cui segue:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pertanto:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ossia:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La suddetta formula può essere resa più snella ponendo $\Delta = b^2 - 4ac$, per cui la (2) potrà essere scritta nella forma:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$