ESERCIZI SVOLTI

ASINTOTI delle funzioni razionali fratte

Per ricavare informazioni sul comportamento di una funzione razionale per $x \to \pm\infty$ si può ricorrere alla divisione polinomiale che consente, tra l'altro, di determinare l'equazione del suo asintoto polinomiale . Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1

$$y = \frac{x^2 - 3x - 7}{x - 3}$$

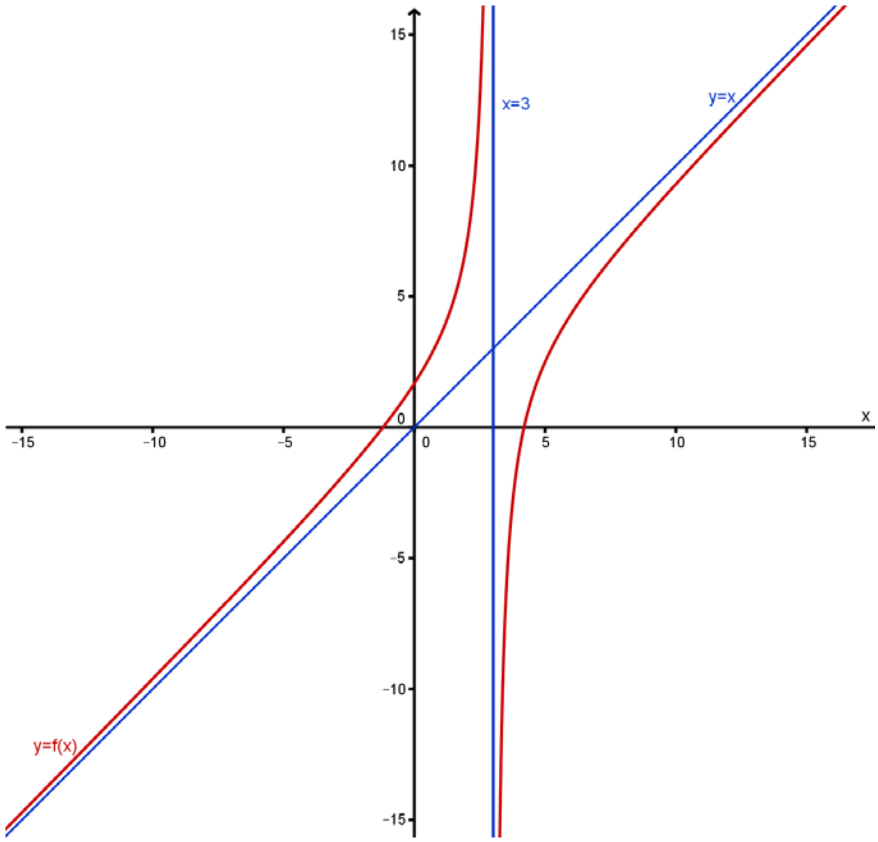
Considerato che x = 3 non è una soluzione del polinomio $x^2 - 3x - 7$, si può verificare con facilità che un asintoto verticale è costituito dalla retta di equazione $x = 3$. Eseguendo la divisione polinomiale della funzione si ottiene quoziente $Q(x) = x$ e resto $R(x) = -7$, per cui:

$$x^2 - 3x - 7 = (x - 3)x - 7$$

pertanto, la funzione data può essere così riscritta:

$$y = \frac{x^2 - 3x - 7}{x - 3} = x - \frac{7}{x - 3}.$$

Per $x \to \pm\infty$ la frazione $\frac{7}{x-3}$ tende a zero, quindi la retta $y = x$ è un asintoto obliquo per la funzione, sia sinistro che destro. Inoltre, essendo la quantità $\frac{7}{x-3}$ positiva per $x>3$, la funzione è al di sotto della retta y = x per $x \to +\infty$.



Analogamente, per $x \to -\infty$ il grafico della funzione si colloca sopra l'asintoto.

Esempio 2

Ricavare informazioni sul comportamento della seguente funzione razionale ricorrendo alla divisione polinomiale.

$$y = \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4}$$

<u>Risolvo</u>

Considerato che $x = \pm 2$ non sono degli zeri per il numeratore, si può verificare con facilità che due asintoti verticali per la funzione sono dati dalle rette $x = \pm 2$.

Dalla divisione polinomiale si ha:

$$Q(x) = 2x + 2 \, ; \; R(x) = 7x + 11$$

per cui:

$$2x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x^2 - 4)(2x + 2) + 7x + 11$$

quindi:

$$y = \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4} = 2x + 2 + \frac{7x + 11}{x^2 - 4} .$$

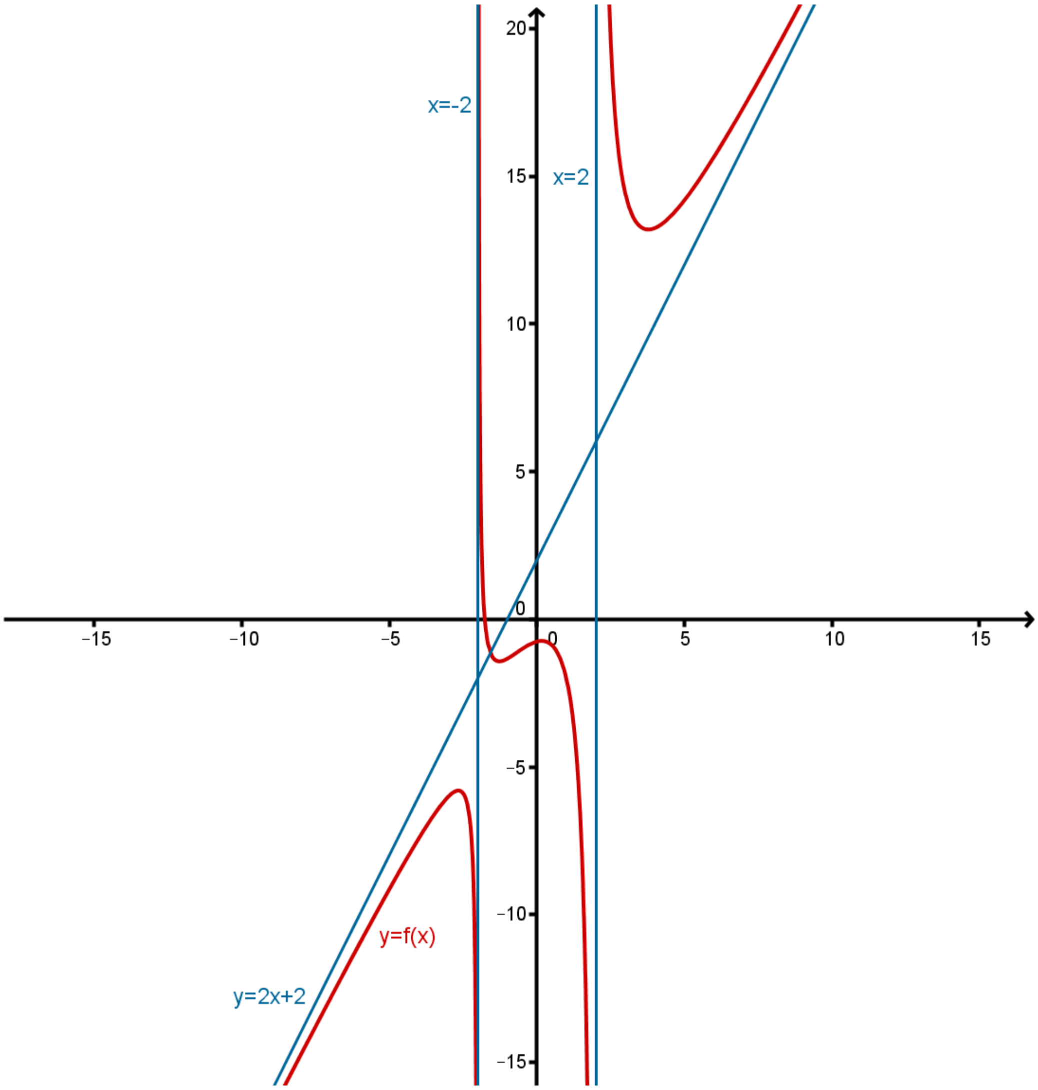
Per $x \to \pm\infty$ la frazione $\frac{7x + 11}{x^2 - 4}$ tende a zero, pertanto la retta $y = 2x+2$ è un asintoto obliquo per la funzione, sia sinistro che destro.

Studiando il segno di h(x) = $\frac{7x + 11}{x^2 - 4}$ ricaviamo:

h(x)>0 per -2<x<-11/7 v x>2;

h(x)<0 per x<-2 v -11/7<x<2

che ci permette di stabilire che il grafico della funzione f(x) si trova sopra la retta y=2x+2 per $x \to +\infty$, mentre accade il viceversa per $x \to -\infty$.



Esempio 3

Spesso si intendono e ricercano come asintoti di una funzione solo le rette, accorgendosi solo occasionalmente di qualche asintoto polinomiale di grado superiore. Analizzeremo ora il caso di una funzione che ammette un asintoto non lineare. In genere, una funzione razionale fratta $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ *e* $q(x)$ di grado rispettivamente *r* ed *s*, ammette come asintoto una funzione polinomiale di grado n quando *r = s + n.* Sia data la funzione $y=\dfrac{x^3-2x-5}{x-1}$.

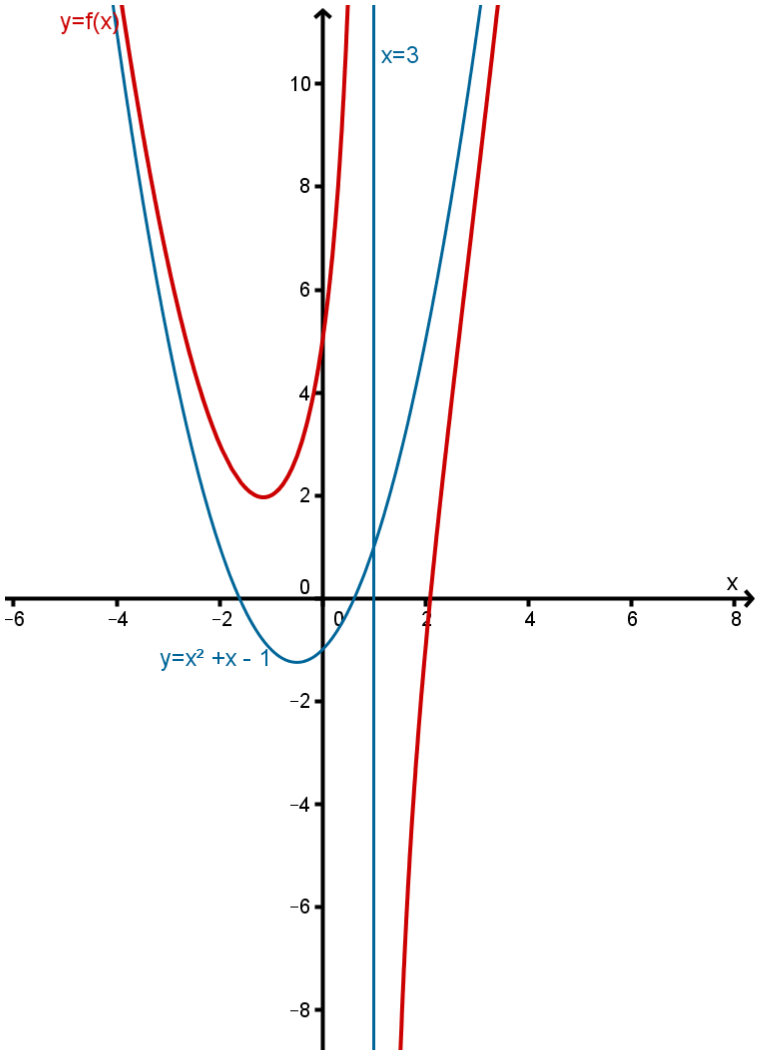
Può essere facilmente verificato che il grafico ha per asintoto verticale la retta di equazione $x=1$.
Calcolando poi il quoziente ed il resto della divisione polinomiale abbiamo:

$$x^3-2x-5=(x-1)(x^2+x-1)-6$$

perciò:

$$y = \frac{x^3 - 2x - 5}{x - 1} = x^2 + x - 1 - \frac{6}{x - 1}$$

Essendo poi $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6}{x-1} = 0$, il grafico ha come asintoto polinomiale la parabola $y = x^2 + x - 1$



Per $x \to +\infty$ il grafico della funzione “sta sopra” la parabola, mentre il viceversa accade per $x \to -\infty$.