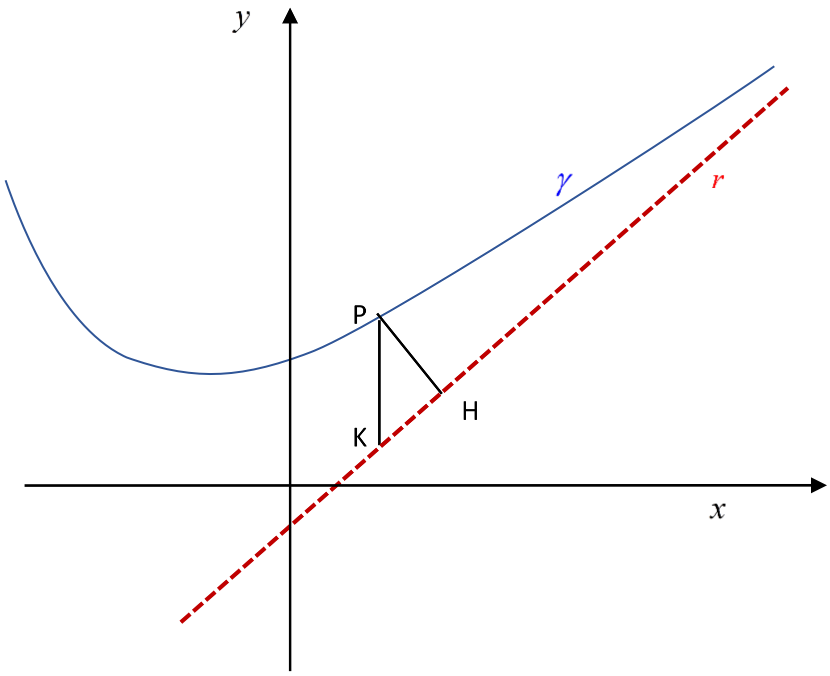
LEZIONI

ASINTOTI di una funzione

Definizione

Sia γ il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$ avente un ramo che si estende all'infinito e sia P un suo punto. ***<u>Una retta r si dice asintoto</u>*** *per tale funzione se la distanza del punto P di γ dalla retta r tende a zero quando P si allontana indefinitamente su γ.*



Poiché gli asintoti sono delle rette, questi possono essere**: <u>verticali</u>, <u>orizzontali</u> oppure <u>obliqui</u>.**

Di seguito sono riportati degli esempi di asintoto per il grafico della funzione:

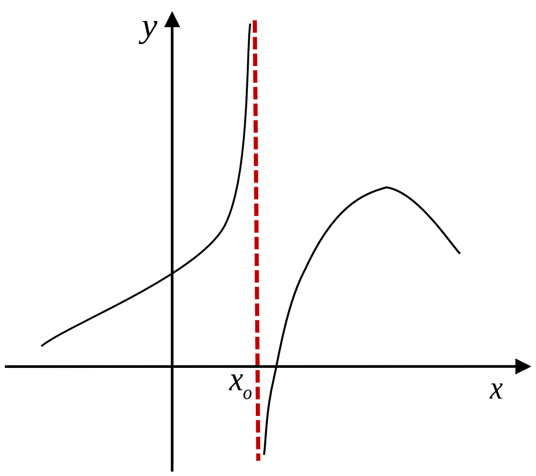


Fig. a: Asintoto verticale per la funzione

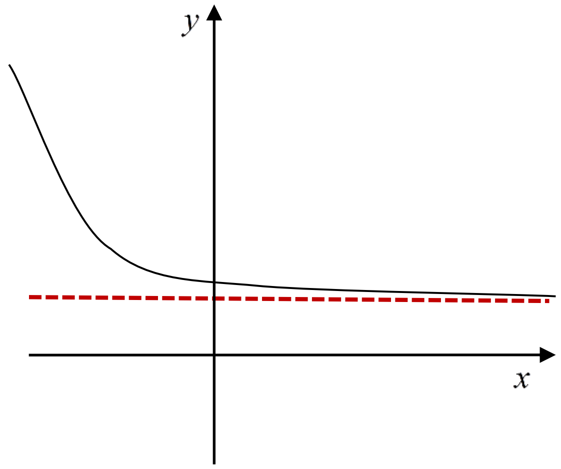


fig.b1: Asintoto orizzontale

N.B. Il grafico di una funzione può intersecare un asintoto orizzontale anche infinite volte mentre può intersecare un asintoto verticale al massimo una volta.

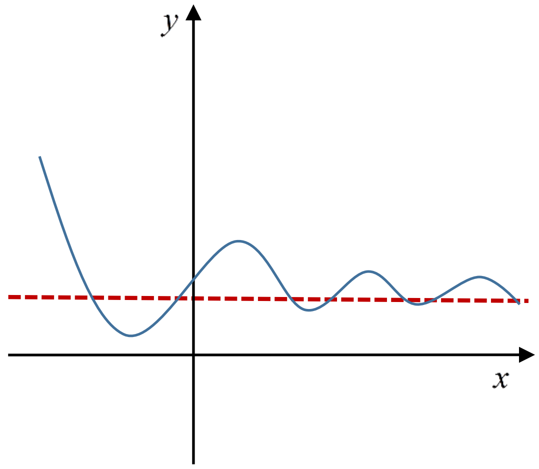


fig. b2: Asintoto orizzontale

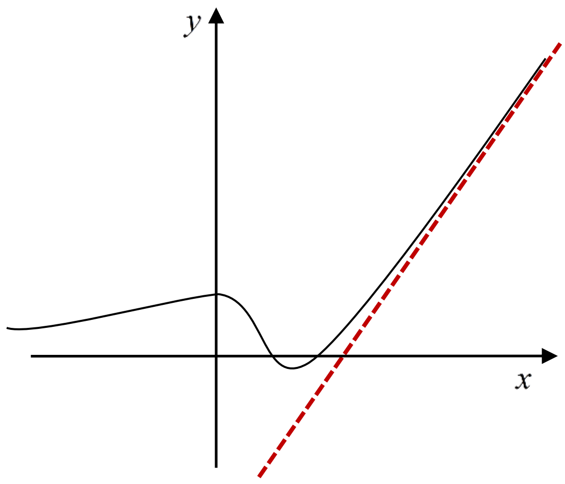


fig.c: Asintoto obliquo

N.B. Come per gli asintoti orizzontali, il grafico di una funzione può intersecare un asintoto obliquo anche infinite volte.

Asintoti verticali.

Sia $y = f(x)$ una funzione reale di una variabile reale, definita in X, e sia x_o un punto di accumulazione a destra [risp. a sinistra] per X. Se al tendere di x verso x_o dalla destra [risp. dalla sinistra] $f(x)$ tende verso $+\infty$ o verso $-\infty$, allora si dice che la retta di equazione $x = x_o$ è un **asintoto verticale a sinistra** [risp. **a destra**] per il grafico di f (*in alto* se il limite di f in x_o è $+\infty$, *in basso* se tale limite è $-\infty$). Nelle figure che seguono sono rappresentati i grafici di alcune funzioni che ammettono asintoti verticali: a destra nelle prime due, a sinistra nella terza e nella quarta, a sinistra e a destra nelle ultime due.

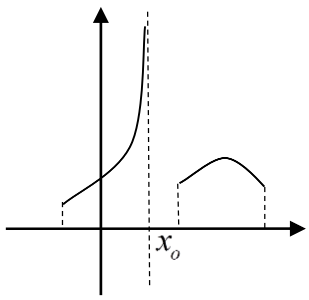


Fig. a

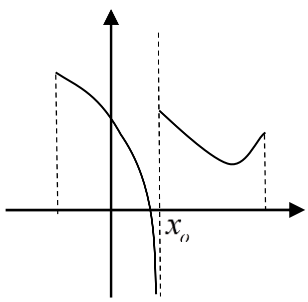


Fig. b

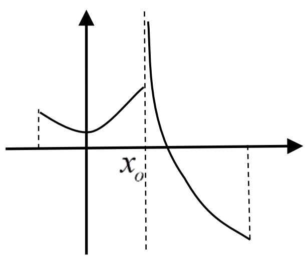


Fig. c

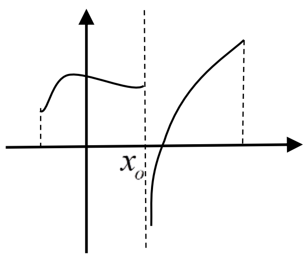


Fig. d

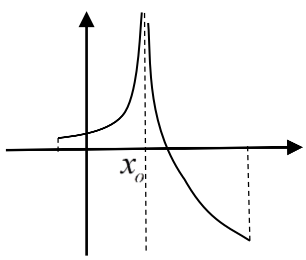


Fig. e

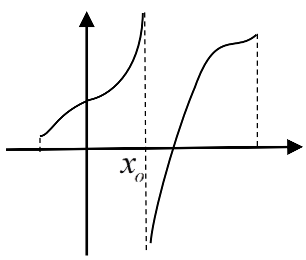
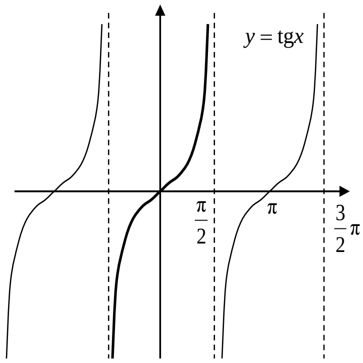


Fig. f

Per la ricerca degli eventuali asintoti verticali per il grafico di una funzione *y* = *f(x)* si procede in questo modo. Si determinano sia i punti x_o di accumulazione per X che non appartengono a X, sia quelli che appartengono a X nei quali la funzione non è continua. Per tali punti potrebbe passare un asintoto verticale per il grafico della funzione. Più precisamente, il grafico della funzione *y* = *f(x)* presenta un asintoto verticale nella retta $x = x_o$ se:



$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty .$$

Si noti che una funzione può ammettere più di un asintoto verticale, basti pensare alla funzione tangente il cui grafico è riportato accanto.

Asintoti orizzontali.

Sia *f* una funzione reale di una variabile reale, definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente [risp. inferiormente]. Se al tendere di x verso $+\infty$ [risp. $-\infty$] la funzione $f(x)$ tende verso un valore finito ℓ, allora si dice che la retta di equazione $y = \ell$ rappresenta un **asintoto orizzontale a destra** [risp. **a sinistra**] per il grafico di *f*. Ossia, se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell ,$$

con ℓ **finito**, allora il grafico della funzione presenta un asintoto orizzontale a destra [risp. a sinistra] per il grafico di *f* nella retta $y = \ell$.

Asintoti obliqui.

Potrebbe anche accadere, però, che la funzione ammetta un **asintoto obliquo**, cioè che il suo grafico tenda ad avvicinarsi indefinitamente ad una retta *r* non parallela né all'asse *x* né all'asse *y*.

Condizione sufficiente *affinché una retta* $y = mx + q$ *sia asintoto obliquo per una funzione y = f(x) è che* $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx + q) \right] = 0$.

Dimostrazione

Proveremo che al tendere di x ad infinito, la distanza del punto P sulla curva dalla retta r tende a zero. Infatti, la differenza

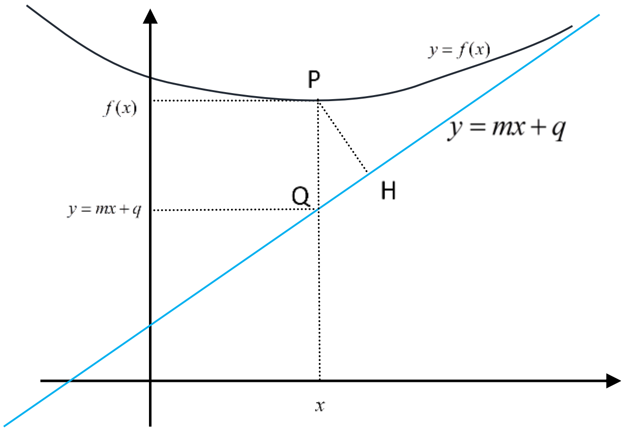
$$\left| f(x) - (mx + q) \right|$$

rappresenta la distanza tra due punti P e Q di uguale ascissa x, l'uno sulla curva che rappresenta la funzione e l'altro sulla retta $y = mx + q$.

Alla luce di quanto è stato detto pocanzi, l'ipotesi

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0 \qquad (1)$$

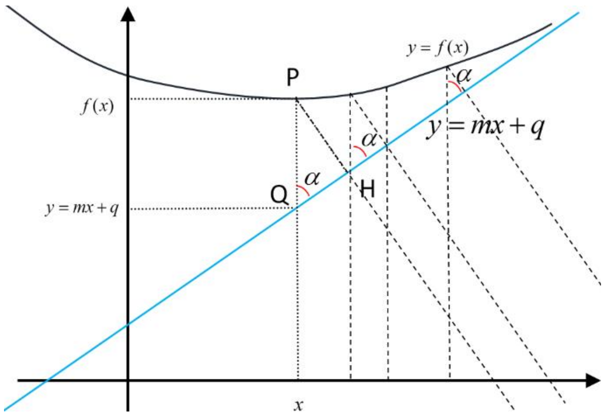
indica che al tendere di x a infinito la distanza $\overline{PQ}$ tende a zero pertanto, essendo $\overline{PQ}$ maggiore di $\overline{PH}$, distanza del punto P sulla curva dalla retta *r*, anche $\overline{PH}$ tenderà a zero al tendere di x ad infinito.



c.v.d.

Osservazione

Al variare di P sulla curva, l'angolo α del triangolo $P\overset{\Delta}{Q}H$ rimane costante pertanto il cateto $\overline{PH}$ risulterà sempre proporzionale a $\overline{PQ}$ essendo $\overline{PH} = \overline{PQ}sen(\alpha)$. Conseguenza di questo fatto è che quando $\overline{PH}$ tende a zero anche $\overline{PQ}$ tenderà a zero e viceversa. Per cui la C.S. sopra espressa può essere così riformulata:



Condizione necessaria e sufficiente *affinché una retta* $y = mx + q$ *sia asintoto obliquo per una funzione y = f(x) è che* $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0$.

Di uso frequente è il seguente

Teorema

$$\left(\begin{array}{l} Il\ grafico\ della\ funzione\ presenta\ un\ asintoto \\ obliquo\ nella\ retta\ di\ equazione\ y = mx+q \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} 1)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = m & con\ m\in\mathbb{R}, m\neq 0 \\ 2)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right] = q & con\ q\in\mathbb{R} \end{array}\right)$$

Dimostrazione

Se la funzione ha nella retta $y = mx+q$ un asintoto obliquo, necessariamente

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right] = 0$$

pertanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[f(x)-(mx+q)\right]}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]\cdot\frac{1}{x} = 0\cdot 0 = 0$$

e quindi:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\left(m+\frac{q}{x}\right)\right] = 0\,. \qquad (2)$$

Essendo:

$$\lim_{x\to\infty}\left[m+\frac{q}{x}\right] = m+0 = m \qquad (3)$$

dalla (2) segue:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{q}{x}\right)+\left(m+\frac{q}{x}\right)\right] = 0+m = m\,.$$

Proviamo ora che $q = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx-q+q\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-mx-q\right)+q\right] = 0+q = q\,.$$

c.v.d.

N.B.

- ***Una funzione che abbia un asintoto orizzontale destro [risp. sinistro] non può avere anche un asintoto obliquo destro [risp. sinistro].***

- ***La ricerca degli asintoti obliqui come quella degli asintoti orizzontali presuppone che il dominio della funzione sia illimitato.***

Particolarmente interessante *si rivela essere la ricerca degli asintoti obliqui nei casi di* ***funzioni razionali fratte,*** cioè del tipo

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

*con il **polinomio A(x) di grado n ed il polinomio B(x) di grado n-1.***
Dividendo il primo per il secondo polinomio si ha:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \quad ,$$

con $Q\left(x\right) = mx + q$ polinomio quoziente di grado 1 ed $R(x)$ polinomio resto di grado inferiore a quello di B(x).
Essendo:

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = (mx + q) + \frac{R(x)}{B(x)} .$$

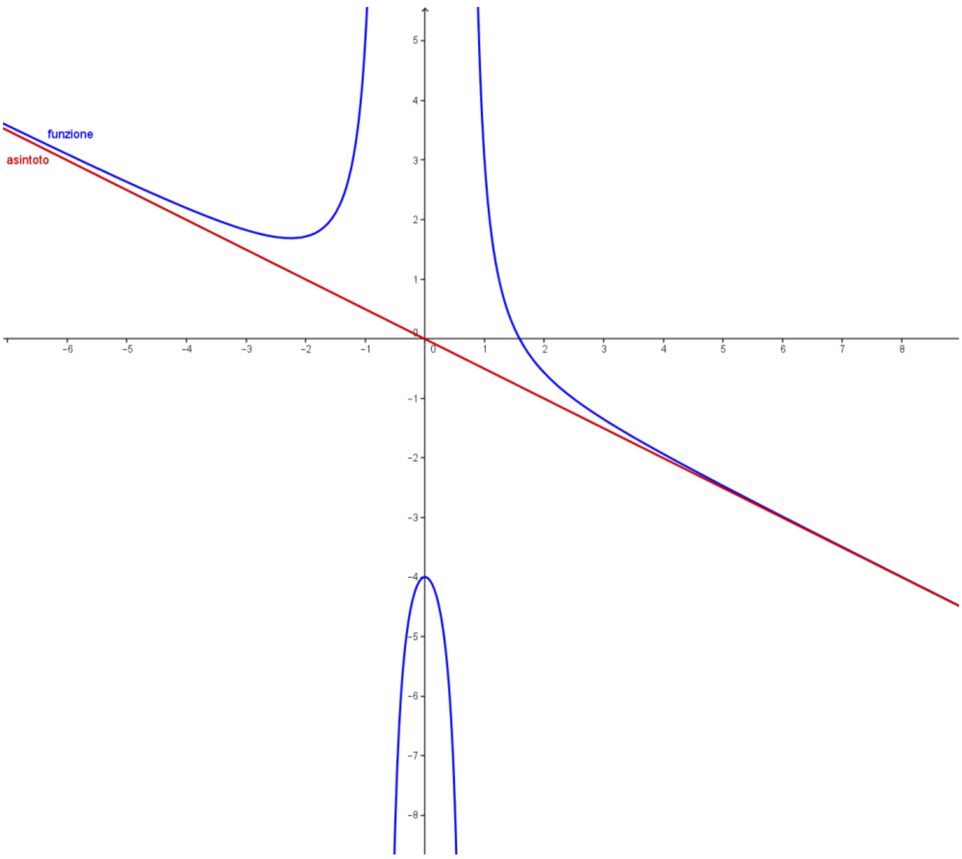
allora

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx - q \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{B(x)} = 0$$

e questo significa che quando x tende ad infinito la funzione tende alla retta $y = mx + q$ che pertanto rappresenta un asintoto obliquo per la funzione.

Vediamone qualche esempio pratico

La funzione $y = \dfrac{4 - x^3}{2x^2 - 1}$ ha come asintoto obliquo la retta $y = -\dfrac{1}{2}x$, infatti eseguendo la divisione si ottiene $Q(x) = -\dfrac{1}{2}x$ mentre $R(x) = -\dfrac{1}{2}x + 4$



<u>Esempi</u>

1) Trovare gli asintoti della funzione di equazione $y = x + \frac{1}{x}$

- Si ha l'asintoto verticale x=0: infatti per x che tende a zero la funzione tende all'infinito; in particolare se x tende a 0^+, f(x) tende a $+\infty$, se x tende a 0^-, f(x) tende a $-\infty$.
- Si ha l'asintoto obliquo $y = x$: basta notare che $f(x) - x = \frac{1}{x}$ e quindi

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Notare che in questo caso l'asintoto obliquo è sia sinistro che destro.

2) Trovare gli asintoti della funzione di equazione $y = e^{-x}(xe^x+1)$

La funzione può essere espressa nella forma

$$y = \frac{xe^x+1}{e^x} = x + \frac{1}{e^x}$$

dalla quale si vede facilmente che non ci sono asintoti verticali.
Per gli asintoti obliqui vale il discorso fatto nell'esercizio precedente:

$$f(x) - x = \frac{1}{e^x}$$

pertanto $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ e quindi la funzione ammette l'asintoto obliquo destro di equazione $y = x$. Invece, $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = \infty$ pertanto la funzione non ammette asintoto obliquo sinistro. Si dimostra con facilità che la funzione non ammette neanche l'asintoto orizzontale sinistro.

3) Trovare gli asintoti della funzione di equazione $y = \sqrt{x^2+1}$.

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ pertanto non ammette asintoti verticali.

Si osservi preliminarmente che per $x\to\infty$: $x^2+1 \to x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} \to \sqrt{x^2} = |x|$.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x} = -1.$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[-x + x \right] = 0 .$$

Quindi per $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto obliquo sinistro di equazione $y = -x$
Analogamente si ha:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - x \right] = 0$$

Quindi per $x \to +\infty$ abbiamo l'asintoto obliquo destro di equazione $y = x$.