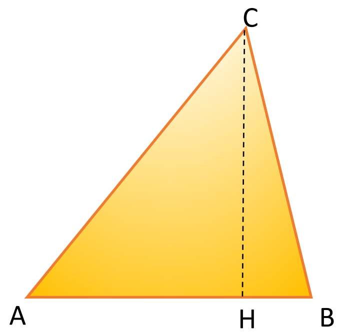
ESERCIZI SVOLTI

RETTE NEL PIANO: applicazioni



Calcolo dell'area di un triangolo note le coordinate dei vertici.

Dato un triangolo di vertici $A(x_A;\, y_A),\, B(x_B;\, y_B)\; e\; C(x_C; y_C)$, in questa lezione ci proponiamo di determinarne l'area sia per mezzo della nota formula:

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CH}}{2}$$

essendo $\overline{AB}$ la base del triangolo e $\overline{CH}$ la relativa altezza, sia attraverso il determinante di una matrice 2x2.

<u>Esercizio</u>

Siano A (1; 3), B (3;1) e C (-6; -2) i vertici del triangolo $A\hat{B}C$. Calcoliamo innanzi tutto la lunghezza della base $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}\,.$$

Per calcolare l'altezza $\overline{CH}$ basterà calcolare la distanza tra il punto $C(x_C; y_C)$ e la retta AB, utilizzando la formula:

$$d(C,r) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Determiniamo l'equazione della retta r_{AB} e poi $\overline{CH}$:

$$r_{AB}: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_B}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow x + y - 4 = 0\,.$$

$$\overline{CH} = d(\mathrm{C}, r_{AB}) = \frac{|1\cdot(-6) + 1\cdot(-2) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-6-2-4|}{\sqrt{2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{12}^{\,6}\sqrt{2}}{\cancel{2}_{\,1}} = 6\sqrt{2}$$

Pertanto l'area del triangolo è:

$$\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = \frac{12 \times \left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{12 \times 2}{2} = 12\,.$$

Allo stesso risultato si può giungere seguendo una strada molto più semplice. Basterà infatti calcolare il determinante(1) di una matrice 2x2 e applicare la seguente formula:

$$\mathcal{A} = \left|\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2} \times \left[(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (y_C - y_A)(x_B - x_A)\right]\right|. \quad (*)$$

Nel nostro caso:

$$\mathcal{A} = \left|\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} -6-1 & -2-3 \\ 3-1 & 1-3 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\times\left(-7\cdot(-2)-(-5)\cdot 2\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\times(14+10)\right| = 12\,.$$

N.B. Invece della formula (*) può anche essere utilizzata la seguente formula equivalente che ha il vantaggio di essere più facile da ricordare:

$$\mathcal{A} = \left|\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\left[x_A\left(y_B-y_C\right)-y_A\left(x_B-x_c\right)+x_B y_C - x_C y_B\right]\right|$$

Osservazioni:

- Attraverso la formula (*) è possibile risalire alla **condizione di allineamento di tre punti**. Infatti, tre punti sono allineati se, e solo se, l'area del triangolo da essi individuato è uguale a zero, pertanto:

$$\left(x_C-x_A\right)\left(y_B-y_A\right)-\left(y_C-y_A\right)\left(x_B-x_A\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(x_C-x_A\right)\left(y_B-y_A\right)=\left(y_C-y_A\right)\left(x_B-x_A\right)$$

da cui:

$$\frac{\left(x_C-x_A\right)}{\left(x_B-x_A\right)}=\frac{\left(y_C-y_A\right)}{\left(y_B-y_A\right)} \quad . \qquad (1)$$

- Inoltre, se nella (1) sostituiamo il punto C con un generico punto P(x; y) della retta, l'equazione diventa:

$$\frac{\left(x-x_A\right)}{\left(x_B-x_A\right)}=\frac{\left(y-y_A\right)}{\left(y_B-y_A\right)}$$

- che è la formula per trovare **l'equazione di una retta passante per due punti**.

---

(1) Per calcolare il determinante di una matrice 2x2 basta moltiplicare i termini della diagonale principale e dal risultato ottenuto sottrarre il prodotto dei termini della diagonale secondaria, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11}\cdot a_{22}\right)-\left(a_{21}\cdot a_{12}\right).$$