ESERCIZI SVOLTI

Sulla determinazione del periodo di una funzione

Definizione

Si dice che una funzione di equazione $y = f(x)$ è **periodica** di **periodo T** (con T > 0) se, per qualunque numero intero relativo k, si ha:

$$f(x) = f(x + kT)$$

cioè se, sostituendo $x + kT$ al posto della x, il valore della funzione non cambia. Ovviamente tale condizione richiede che sia x che $x + kT$ appartengano al dominio della funzione data. In particolare, il più piccolo valore positivo di T, per il quale vale la (1), prende il nome di ***periodo principale*** o semplicemente ***periodo***.
La maggior parte delle funzioni periodiche che incontriamo in matematica sono esprimibili mediante funzioni goniometriche. L'esame pratico di alcune questioni ricorrenti relative a questo tipo di funzioni verrà affrontato negli esercizi che qui proponiamo. Prima di iniziare, però, è opportuno ricordare il periodo di alcune funzioni goniometriche elementari:

a) $y = senx$ $\qquad T = 2\pi$

b) $y = \cos x$ $\qquad T = 2\pi$

c) $y = tgx$ $\qquad T = \pi$

d) $y = ctgx$ $\qquad T = \pi$

Esercizi

Determinare il periodo delle seguenti funzioni goniometriche:

1. $y = sen^2 x$

Svolgimento:

Innanzitutto ricordiamo la formula di duplicazione del coseno:

$\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$.

Da questa segue

$$sen^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Quindi il periodo della funzione $sen^2 x$ è uguale a quello della funzione $\cos(2x)$.

Se indichiamo con T il periodo della funzione $\cos(2x)$, necessariamente

$$\cos(2x) = \cos\left[2(x + kT)\right]; \qquad (1)$$

d'altra parte, considerando la periodicità della funzione coseno, si ha:

$$\cos(2x) = \cos\left(2x + 2k\pi\right). \qquad (2)$$

Confrontando le relazioni (1) e (2), si ha:

$$2x + 2kT = 2x + 2k\pi$$

da cui si ricava il periodo della funzione $y = sen^2 x$:

$$T = \pi .$$

2. $y = sen2x$

Svolgimento:

Sia T il periodo richiesto, necessariamente:

$$sen(2x) = sen[2(x + kT)] \qquad (3)$$

D'altra parte, essendo la funzione seno periodica di periodo 2π, si avrà:

$$sen(2x) = sen(2x + 2k\pi) \qquad (4)$$

Confrontando le relazioni (3) e (4) segue:

$$2x + 2k\pi = 2x + 2kT$$

da cui ricaviamo il periodo cercato: $T = \pi$.

3. $y = \cos(3x + \alpha) \qquad T = \frac{2\pi}{3}$

Svolgimento:

Sia T il periodo da determinare, dovrà essere:

$$\cos(3x + \alpha) = \cos\left[3(x + kT) + \alpha)\right] \qquad (5)$$

d'altra parte, la funzione coseno è periodica di periodo 2π pertanto:

$$\cos(3x + \alpha) = \cos(3x + \alpha + 2k\pi) \qquad (6)$$

Confrontando la (5) con la (6), si avrà:

$$3x + 3kT + \alpha = 3x + \alpha + 2k\pi$$

da cui:

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

4. $y = sen^2 5x \qquad T = \frac{\pi}{5}$

Svolgimento:

Innanzitutto ricordiamo che la funzione $sen^2 x$ ha periodo π per cui:

$$sen^2 5x = sen^2 (5x + k\pi) \qquad (7)$$

Se indichiamo con T il periodo della funzione $y = sen^2 5x$, necessariamente

$$sen^2 5x = sen^2 \left[5(x + kT)\right]; \qquad (8)$$

Confrontando le relazioni (7) e (8), si avrà:

$$5x + 5kT = 5x + k\pi$$

da cui :

$$T = \frac{\pi}{5}.$$

5. $y = sen\frac{x}{3}$

Svolgimento:

Sia T il periodo richiesto, necessariamente:

$$sen(\frac{x}{3}) = sen\frac{x + kT}{3}. \qquad (9)$$

D'altra parte, essendo la funzione seno periodica di periodo 2π, si avrà:

$$sen(\frac{x}{3}) = sen(\frac{x}{3} + 2k\pi) \qquad (10)$$

Confrontando le relazioni (9) e (10) segue:

$$\frac{T}{3} = 2\pi$$

e quindi: $T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$.