ESERCIZI SVOLTI

ASINTOTI delle funzioni razionali fratte

1) Trovare le equazioni degli asintoti della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$$

La funzione è definita in $\left]-\infty,\ 1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Per trovare le equazioni degli eventuali asintoti bisogna calcolare i limiti della funzione per x tendente nei punti in cui la funzione stessa non è definita, cioè in 1 e in $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3x+1}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x-1}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x-1}=3.$$

I risultati raccolti ci consentono di affermare che la funzione $f(x)$ presenta un asintoto verticale di equazione $x=1$, sinistro e destro, ed un asintoto orizzontale di equazione $y=3$, anche questo sinistro e destro. La presenza dell'asintoto orizzontale, sinistro e destro, è incompatibile con quella di un asintoto obliquo.

2) Trovare le equazioni degli asintoti della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x+1}$$

La funzione è definita in $\left]-\infty,\ -1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$

Per trovare le equazioni degli eventuali asintoti bisogna calcolare i limiti della funzione per x tendente nei punti in cui la funzione stessa non è definita, cioè in -1 e in $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-25}{x+1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-25}{x+1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-25}{x+1}=\pm\infty$$

I risultati forniti dai primi due limiti dicono che la funzione $f(x)$ presenta un asintoto verticale di equazione $x=-1$. Siccome il limite della funzione $f(x)$, per x tendente ad infinito, non è un valore finito bensì è infinito, vi è motivo di ipotizzare la presenza di un asintoto obliquo la cui equazione si determina nel seguente modo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-25}{x^2+x}=1;$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left[\ f(x)-m\,x\ \right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-25-x}{x+1}=-1.$$

Pertanto la retta $y=x-1$ costituisce un asintoto obliquo per la funzione data.

3) Trovare le equazioni degli asintoti della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x^2-x-4}{x-1}.$$

La funzione è definita in $\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

Calcolando i limiti della funzione nei punti $x=\pm\infty$, $x=1$, si ha:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-4}{x-1}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-4}{x-1}=-\infty;$$

Quindi $x=1$ è asintoto verticale per la funzione $f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-4}{x-1}=\infty$$

Il valore di quest'ultimo limite esclude la presenza di asintoti orizzontali ma implica la possibilità che esistano asintoti obliqui:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-4}{x^2-x}=1,$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left[\ f(x)-m\,x\ \right]=\lim_{x\to\infty}-\frac{4}{x-1}=0.$$

Pertanto la retta $y=x$ costituisce un asintoto obliquo per la funzione data.

4) Trovare le equazioni degli asintoti della seguente funzione:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

La funzione è soggetta alle seguenti limitazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}\geq 0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x+1}\geq 0$$

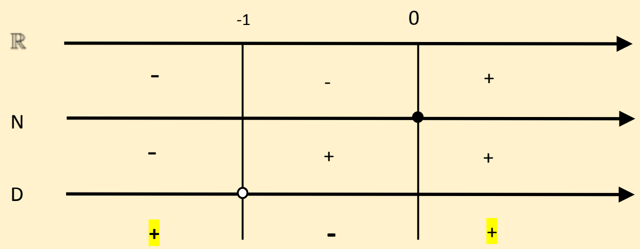
Risolvendo:

N>0:

$x \ \geq 0$

D > 0:

$x \ > -1$



Pertanto il suo dominio è costituito dagli intervalli: $\left]-\infty,\,-1\right[\cup\left[\,0,+\infty\right[$.

Calcolando i limiti della funzione $f(x)$ nei punti $x=\pm\infty$, $x=-1$, si ha:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=1.$$

In conclusione, la funzione $f(x)$ presenta un asintoto orizzontale di equazione: $y=1$

ed un asintoto verticale di equazione: $x=-1$

5) Trovare le equazioni degli asintoti della seguente funzione:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$$

La funzione è soggetta alle seguenti limitazioni:

$$x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\leq -1 \vee x\geq 1.$$

quindi il suo dominio è dato da $\left]-\infty,\ -1\right]\cup\left[\ 1,\ +\infty\ \right[$.

Calcolando i limiti della funzione $f(x)$ per x tendente a $\pm\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

La funzione pertanto presenta un asintoto orizzontale sinistro rappresentato dalla retta y = 0 mentre a destra, poiché il primo limite è uguale a $+\infty$, potrebbe presentare un asintoto obliquo pertanto calcoliamo *m* e *q*:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = 2;$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0;$$

In conclusione, la funzione $f(x)$ presenta un asintoto obliquo destro di equazione: $y = 2x$.